

Tecnologías educativas: enseñanza de algunos temas de matemática combinando MAPLE y un Simulador

Autores:

María Itatí Gandulfo – Stella Maris Vaira – María Alicia Gemignani

Facultad Regional Paraná – UTN - Almafuerite 1033 – (3100) – Paraná- Entre Ríos

serving1@infovia.com.ar svaira@fbc.unl.edu.ar marias556@ciudad.com.ar

Resumen

Teniendo en cuenta que la Universidad está inmersa en un mundo digital y en el marco de un proyecto de investigación, se desarrollan tareas tendientes a cambiar el aula tradicional explorando cómo el uso de las tecnologías pueden ser artífices de ese cambio. Se presenta el diseño de una experiencia de enseñanza y aprendizaje del cálculo de soluciones de ecuaciones derivadas de un modelo matemático para resolver un problema. En especial se tiene en cuenta la participación de las TIC'S: MAPLE como software para graficar y acotar los intervalos en los que se encuentran las soluciones, y el uso de un simulador que permita proponer un problema más amplio, variando posibles valores de parámetros. Planteado desde una perspectiva constructivista, en la que el alumno construye su propio aprendizaje, se asume que la función que se le asigna al docente es la de intervenir en forma apropiada en el desarrollo de los temas de Matemática, fomentando la presentación de problemas significativos para el alumno, que lo hagan pasar de estructuras menos complejas a modelos y esquemas mas formales y elaborados, de esta forma se diseña una experiencia pedagógica para enseñar algunos temas de Análisis Matemático en el que se integran las soluciones analíticas, las soluciones aproximadas, con las interpretaciones geométricas y la búsqueda de un nuevo problema o concepto.

Palabras claves: resolución de problemas, simuladores, tecnologías

Introducción

Para el presente trabajo, nos planteamos como objetivo la elaboración de propuestas pedagógicas que incluyan las posibilidades de las TIC's en el proceso enseñanza-aprendizaje y que sirvan de modelo de un abordaje del conocimiento centrado en el alumno.

Desde la perspectiva computacional, se maneja la hipótesis de que el alumno puede usar la computadora como una herramienta y apoyo en su aprendizaje, en el sentido de que le permita pasar del nivel concreto a lo formal de manera novedosa y rápida, afectando así los modelos constructivistas tradicionales en materia educativa, es por eso que planteamos el desarrollo de situaciones didácticas que naturalmente destaquen la importancia del recurso tecnológico como herramienta de resolución, creando un medio ambiente rico en experiencias significativas para el alumno.

Con la omnipresencia de los medios de comunicación social, los aprendizajes que las personas realizan informalmente a través de la televisión, la radio y los demás medios de comunicación social, las TIC y especialmente Internet, cada vez tienen más relevancia en nuestro bagaje cultural. Los alumnos cada vez saben más, aunque no

necesariamente del "currículum oficial", por ello, uno de los retos que tiene actualmente educación, en particular la Educación Superior consiste en integrar los aportes de estos poderosos canales formativos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, facilitando a los estudiantes la estructuración y valoración de estos conocimientos dispersos que obtienen a través de los medios tecnológicos.

Se necesitan nuevos contenidos curriculares, nuevas competencias, nuevos diseños pedagógicos para la enseñanza, en este caso de la enseñanza de la Matemática. Los profundos cambios que en todos los ámbitos de la sociedad se han producido en los últimos años exigen una nueva formación de base para los más jóvenes y una formación continua a lo largo de la vida para todos los ciudadanos (1, 2).

En todos los niveles educativos se originan cambios, en los planes de estudios se va incorporando la alfabetización digital básica, cada vez más imprescindible para todo ciudadano y diversos contenidos relacionados con el aprovechamiento específico de las TIC en cada materia, por otra parte, determinadas capacidades y competencias adquieren un papel relevante en la currícula universitaria: la búsqueda y selección de información, el análisis crítico y la resolución de problemas, la elaboración personal de conocimientos funcionales, la argumentación de las propias opiniones y la resignificación de los conceptos, el trabajo en equipo, la capacidad de autoaprendizaje, la actitud creativa e innovadora, la iniciativa y la interdisciplinariedad (2, 3).

Los docentes universitarios atentos a los cambios, tenemos hoy la posibilidad de usar diferentes tecnologías para complementar el proceso de enseñanza - aprendizaje y de aportar elementos que son críticos, incluso para interpretar la realidad incorporando una componente multicultural. Como viene anunciando Hopenhayn (2002): *“y cuanto mayor acceso a la industria audiovisual y a las nuevas TICs tengan los países latinoamericanos, mayores posibilidades habrá de que su propia diversidad cultural dialogue con el resto del mundo en condiciones de igualdad simbólica, revirtiendo la posición de rezago o de subordinación que hoy tenemos frente al mundo industrializado”*.

A efectos de aprovechar la posibilidad que brindan las tecnologías actuales se intenta complementar las clases de matemática y analizar su posible influencia en el proceso de enseñanza aprendizaje. De esta forma se estima aumentar la potencialidad que tiene la autogestión del aprendizaje en el afianzamiento de buenos hábitos de estudios. Como ya constataba la UNESCO en su informe del año 2000, *«la transformación educativa pasa a ser un factor fundamental para desarrollar la capacidad de innovación y la creatividad, a la vez que la integración y la solidaridad»*.

En el marco del proyecto de investigación: *“Educación Matemática y Tecnologías. Implementación de los medios tecnológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje: perspectivas de mejora y análisis del cambio”*, nuestro trabajo se centra en la presentación de una propuesta pedagógica con la incorporación de un laboratorio virtual adecuado para enseñar temas de Análisis Matemático para los estudiantes de Primer Año de Ingeniería (Especialidades: Civil, Electromecánica y Electrónica) de la Facultad Regional Paraná de la Universidad Tecnológica Nacional. Actividad que se viene desarrollando desde hace dos años. En especial al hablar de los usos de los entornos tecnológicos se hace importante destacar la Alfabetización Visual de la Matemática. Si se comparan libros de texto en las universidades de hace 20 años atrás con los actuales,

el cambio está a la vista: gráficos en dos y tres dimensiones realizados con software específicos pasan a ser la motivación de muchos de los temas de Matemática (3, 4).

Integrar los recursos tecnológicos al aula universitaria es un desafío que nos hemos propuesto. Se sugiere una metodología de enseñanza que posibilite, a los alumnos, comprender la importancia de los temas desarrollados en las materias, pero fomentando la preocupación por los temas teóricos subyacentes de tal manera de integrar contenidos desarrollados en otras asignaturas, para establecer la idea de que la Matemática, en su formación básica, es fundamental (5,6).

Alfabetización visual en Matemática

Aunque seguirá siendo necesario saber leer, escribir, calcular, tener conocimientos de Matemática, Ciencias y demás áreas del conocimiento, se debe complementar la tarea de enseñar aprovechando las funciones que ofrecen las TIC: análisis crítico de la imagen, búsqueda aproximada de soluciones, canal de comunicación, serán algunas de las tareas para complementar y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje presenciales, las TIC permiten crear nuevos entornos de trabajo on-line de aprendizaje, que, de alguna manera minimiza la exigencia de coincidencia en el espacio y el tiempo de docentes y alumnos.

Ante la demanda de darle significado a la imagen, hay que diseñar la clase de Matemática de acuerdo a ella en la que se utilizarán instrumentos como los videos, powerpoint, pizarra eléctrica que constituirán nuevos elementos acompañando el proceso de enseñanza-aprendizaje. Las diversas actividades que se pueden realizar en el aula de una clase de Matemática al nivel universitaria, facilitarán también el aprendizaje a lo largo de toda la vida. Los alumnos tienen derecho a saber de que se trata cuando se habla de educar utilizando las tecnologías actuales. En la lucha constante por la igualdad de oportunidades, los alumnos y el futuro profesional deben estar preparados para hacer frente al medio laboral. Como en los demás ámbitos de actividad humana, las TIC se convierten en un instrumento cada vez más indispensable en las instituciones educativas y tienen múltiples funcionalidades: medio de expresión y creación.

La visualización en matemática tiene una connotación particular, ya que las ideas, los conceptos y métodos de la matemática presentan una gran cantidad de contenidos visuales. Prestando atención explícita a las representaciones concretas, que permiten revelar las relaciones abstractas que luego se formalizan, es que se realiza la visualización en matemática (7, 8). Con esto se pretende que las ideas, conceptos y métodos que presenten gran riqueza de contenidos visuales sean representadas intuitivamente y así su utilización resultará muy provechosa, tanto en el manejo de tales conceptos como en los métodos para la resolución de problemas de campo.

A estas contribuciones le agregamos las ventajas que se incrementan cuando se utilizan los recursos de las Tecnologías Educativas.

La propuesta pedagógica

En este trabajo se utiliza el Simulador JAVA, el Software MAPLE y la Planilla de Cálculo para desarrollar un problema de Matemática, para alumnos de primer año de Ingeniería, en la asignatura Análisis Matemático. Los simuladores incorporados fueron realizados en el lenguaje de programación JAVA, usando el NIPPE (núcleo interactivo

para programas educativos), desarrollado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España, en su proyecto “Descartes” para matemática. Los simuladores digitales utilizados en este trabajo corresponde a ese proyecto, los mismos han sido creados y adaptados a las necesidades de nuestro contexto, ya que son de libre uso educativo, y siempre que no medie finalidad comercial, uno puede crear sus propios Applets de Java para colocar en una página web o utilizarlo en forma off-line en las aplicaciones que se desee.

En este trabajo se muestra un desarrollo del mismo que permite realizar en forma interactiva la resolución de un problema que involucra los siguientes conceptos:

- Resolver un sistema de ecuaciones no lineales.
- Encontrar las raíces de una ecuación.
- Graficar funciones, variando los parámetros involucrados.
- Estimar raíces.
- Diseñar algoritmos sencillos de resolución numérica.

Este grupo de investigación propone esta metodología de trabajo porque el uso del simulador y de los Software en Matemática permiten:

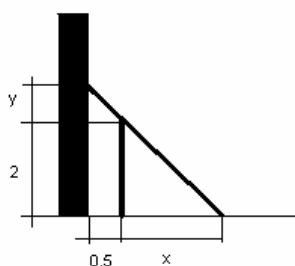
- Aumentar la motivación para el aprendizaje.
- Facilitar el desarrollo de modelos mentales.
- Fomentar el uso activo de estrategias de resolución de problemas.
- Facilitar las representaciones gráficas.
- Desarrollar aproximaciones en la resolución de problemas.
- Favorecer el pensamiento reflexivo que posibilite la afirmación o modificación de conocimientos previos que conllevan a la generación de nuevos conocimientos.

Diseño de la experiencia

El grupo de alumnos realiza la ejercitación propuesta en el laboratorio de computación con ayuda del simulador, grafica, busca aproximar soluciones, varía los parámetros y realiza su propia experimentación en grupos de 2 ó 3 alumnos por computadora. Los docentes del equipo de investigación realizan observaciones para efectuar una reflexión cualitativa sobre las motivaciones que puedan ser observadas en el grupo y se obtiene una observación o valoración de juicio.

Al finalizar, se les pide a los alumnos que realicen esa misma experiencia sin la ayuda de la computadora y nuevamente se recoge su valoración o juicio post-experiencia. Esto hace posible la comparación pareada de la experiencia y de esta manera se tiene una conclusión con significancia estadística.

Se seleccionó en esta oportunidad el siguiente problema:



“Una escalera de cuatro metros recostada sobre un tapial de dos metros debe llegar hasta una pared alta situada a 0,5 metros del pilar. Queremos determinar la distancia x desde la base de la escalera hasta la parte inferior del tapial.”

Para su solución se debe resolver:

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = 16 & \text{Ecuación 1} \\ y = \frac{1}{x} & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Que lleva a encontrar los ceros de la ecuación:

$$x^2 + x - \frac{47}{4} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} = 0 \quad \text{Ecuación 3}$$

Métodos de solución:

Para hallar dicha solución se solicita a los alumnos describir los distintos métodos que tienen a su alcance. Se reconoce la dificultad de resolver la ecuación 3 algebraicamente. Para determinar la presencia de una solución se hace resaltar la importancia del Teorema del Valor Intermedio, que determina que hay una solución en el intervalo $[0.3, 1]$ y también en el intervalo $[2, 3]$, ya que si consideramos la función:

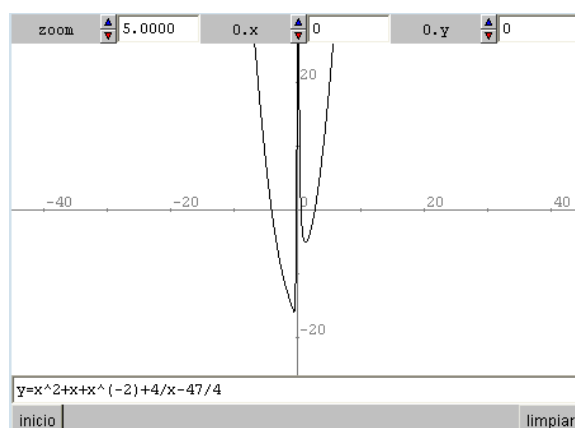
$$y = x^2 + x - \frac{47}{4} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x}$$

En los intervalos:

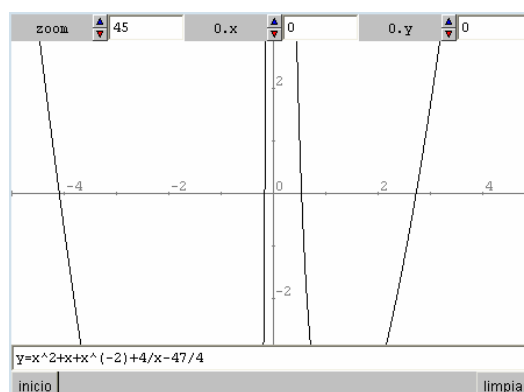
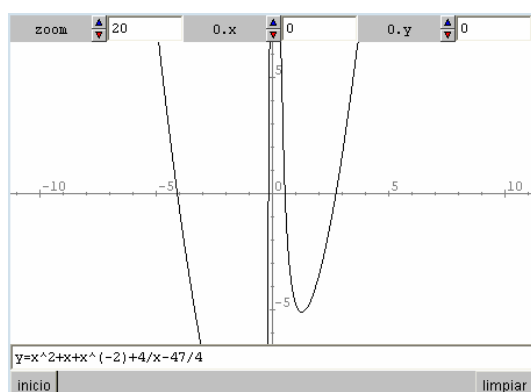
$$\text{Int}[0,3;1] \quad y(0,3) = 13,08 > 0 \quad ; \quad y(1) = -4,75 < 0$$

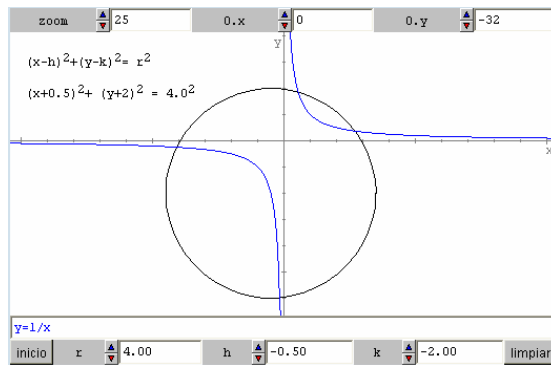
$$\text{Int}[2;3] \quad y(2) = -3,5 < 0 \quad ; \quad y(3) = 1,69 > 0$$

Se plantea la solución aproximada mediante gráfica de estas ecuaciones con un simulador, resultando:



Se realizan sucesivos acercamientos:





Al ver las gráficas de las curvas con el simulador, se plantean los interrogantes:

¿Cuáles pueden ser soluciones de las ecuaciones?

¿Cuáles pueden ser soluciones del problema?

¿A qué situación representan cada solución?

Con ayuda de la planilla de cálculos Excel, realizamos aproximaciones numéricas sucesivas, acotando las raíces, siendo:

Yc: coordenada y de la circunferencia (ec.1)

Yh: coordenada y de la homográfica (ec.2)

Y: coordenada y de la ecuación de intersección

X	Yc	Yh	Y
0,30	1,919184	3,333333	13,084444
0,35	1,892300	2,857143	8,314337
0,40	1,885872	2,500000	5,060000
0,45	1,879433	2,222222	2,729660
0,50	1,872983	2,000000	1,000000
0,55	1,866523	1,818182	-0,318988
0,60	1,860052	1,666667	-1,345556
0,65	1,853570	1,538462	-2,156790
0,70	1,847077	1,428571	-2,804898
0,75	1,840573	1,333333	-3,326389

Se ve de esta tabla que la solución se encuentra en el intervalo [0,50;0,55]. Se realizan nuevas tablas con mayor aproximación.

X	Yc	Yh	Y
0,500	1,872983	2,000000	1,000000
0,520	1,870400	1,923077	0,430933
0,540	1,867816	1,851852	-0,081637
0,560	1,865230	1,785714	-0,544767

X	Yc	Yh	Y
0,5360	1,863509	1,865672	0,016713
0,5361	1,863482	1,865324	0,014230
0,5362	1,863456	1,864976	0,011748
0,5363	1,863429	1,864628	0,009267
0,5364	1,863402	1,864280	0,006788
0,5365	1,863375	1,863933	0,004310
0,5366	1,863348	1,863586	0,001833
0,5367	1,863322	1,863238	-0,000643
0,5368	1,863295	1,862891	-0,003117

Para la otra solución se realiza lo mismo en el intervalo [2,3]

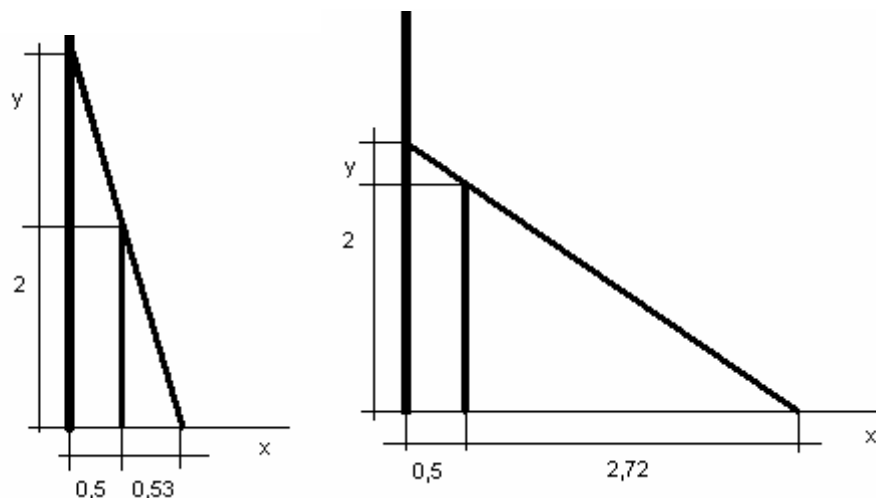
X	Yc	Yh	Y
2,00	1,122499	0,500000	-3,500000
2,20	0,951271	0,454545	-2,685207
2,40	0,754995	0,416667	-1,749722
2,60	0,527845	0,384615	-0,703609
2,80	0,260531	0,357143	0,446122
3,00	-0,063508	0,333333	1,694444

X	Yc	Yh	Y
2,60	0,527845	0,384615	-0,703609
2,65	0,465259	0,377358	-0,425667
2,70	0,400000	0,370370	-0,141344
2,75	0,331845	0,363636	0,149277
2,80	0,260531	0,357143	0,446122

X	Yc	Yh	Y
2,700	0,400000	0,370370	-0,141344
2,705	0,393319	0,369686	-0,112564
2,710	0,386608	0,369004	-0,083722
2,715	0,379869	0,368324	-0,054816
2,720	0,373099	0,367647	-0,025847
2,725	0,366300	0,366972	0,003184
2,730	0,359470	0,366300	0,032277
2,735	0,352610	0,365631	0,061434

X	Yc	Yh	Y
2,7240	0,367662	0,367107	-0,002628
2,7241	0,367526	0,367094	-0,002047
2,7242	0,367390	0,367080	-0,001465
2,7243	0,367254	0,367067	-0,000884
2,7244	0,367117	0,367053	-0,000303
2,7245	0,366981	0,367040	0,000278
2,7246	0,366845	0,367026	0,000859
2,7247	0,366709	0,367013	0,001440

Estos resultados llevan a preguntarse ¿a qué situación representa cada solución?



Analizando los resultados, se ve que la primera solución presenta una posición de la escalera muy empinada y la segunda presenta una posición que puede ser inestable porque resbala. Se puede preguntar si habría otra posición intermedia que tenga un ángulo más conveniente, lo que induciría a trabajar con la variación de parámetros, la correspondiente variación en las gráficas y la obtención de la solución óptima.

Resolución aproximada de ecuaciones:

Para la resolución aproximada de la ecuación se solicita la siguiente actividad:

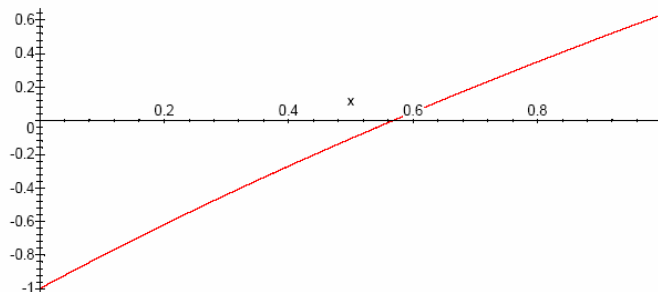
1) Considerar la ecuación: $x - e^{-x} = 0$.

a) Verificar, mediante una representación gráfica, que la ecuación tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$.

b) Utilizar MAPLE, representar gráficamente la función $f(x) = x - e^{-x}$.

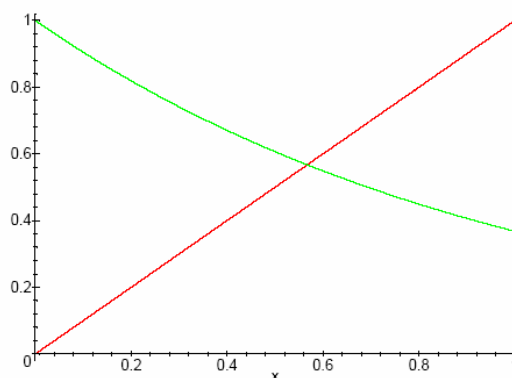
plot(x-exp(-x),x=0..1);

De la gráfica, podemos estimar el valor aproximado 0.55 para la solución.



c) Utilizar MAPLE, representar por separado (pero en un mismo sistema de coordenadas) las funciones $f(x) = x$, $f(x) = e^{-x}$.

plot([x,exp(-x)],x=0..1);



d) Utilizar el Método del Punto Fijo para resolver la ecuación $x - e^{-x} = 0$.

e) Utilizar la Planilla de cálculo Excel, para obtener un valor aproximado de la raíz con 3 cifras significativas. Programar en la planilla de cálculo la secuencia de pasos para aplicar el Método del Punto Fijo.

2) Considerar la ecuación: $x = \cos x$.

a) Verificar, mediante una representación gráfica, que la ecuación tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$.

b) Utilizar MAPLE, representar gráficamente la función $f(x) = x - \cos x$. Observar algún valor x_0 próximo a la raíz.

c) Utilizar la Planilla de cálculo Excel, para obtener un valor aproximado de la raíz con 4 cifras significativas.

d) Analizar que la formulación dada por $x = \frac{x + \cos x}{2}$ es la adecuada para resolver la ecuación mediante iteración de punto fijo, para cualquier valor inicial x_0 en el intervalo $[0, 1]$ (Ayuda: analice las hipótesis para obtener la convergencia).

e) Programar en la planilla de cálculo la secuencia de pasos para aplicar el Método del Punto Fijo para la formulación anterior (10).

f) Resolver la ecuación $x = \cos x$ con 5 cifras decimales exactas usando una formulación de punto fijo del tipo: $x = x - \lambda f(x)$, tomar como intervalo inicial $[0, 1]$.

Ayuda: En este ejercicio se proporciona el intervalo que contiene la solución. En primer lugar se debe expresar la ecuación en forma normal $f(x) = 0$ e identificar $f(x)$. Los pasos siguientes calculan las iteraciones para la forma de punto fijo $g(x) = x - \lambda f(x)$. Como valor inicial tomar el punto medio del intervalo. Para mayor claridad, se observa que primero se construye $g(x)$ como expresión y, después, se la transforma en función con **unapply**.

```
> f:=x->x-cos(x);
a:=0;
b:=1;
fa:=evalf(f(a));
fb:=evalf(f(b));
f1:=(fb-fa)/(b-a);
lambda:=1/f1;
g:=x-lambda*f(x);
g:=unapply(g,x);
`*****`;
x0:=evalf((a+b)/2);
n:=9;
for i from 0 to n do
x.(i+1):=g(x.i);
od;
```

3) Resolver la ecuación 3: $x^2 + x - \frac{47}{4} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} = 0$ del problema dado inicialmente, usando el MAPLE con alguna formulación apropiada de punto fijo para resolverla.

Conclusión

El trabajo que los alumnos pueden desarrollar en el aula en un ambiente computacional permite abordar nuevas discusiones para la resolución de un problema, reorganiza la discusión del mismo ya que le permite refutar o corroborar un resultado, que puede verificar. Dinamiza el trabajo individual y grupal, además se convierte en protagonista de la clase. Una vez presentado el problema, el alumno tiene varias instancias: calcular, interpretar, extraer conclusiones, simular nuevas situaciones, formular hipótesis y demostrar.

Los casos presentados en esta propuesta de trabajo traen algunas evidencias que muestran cómo los medios utilizados enriquecen y reorganizan el pensamiento matemático, generando un ambiente de trabajo rico en dinámica de producción.

Con respecto al uso de las tecnologías en un ámbito educacional, que requieren cada vez más de nuevos matices, no tienen un límite establecido en su empleo, pero está claro que, discutir temas de matemática, que de otro modo resultan más abstractas y difíciles de imaginar, no deben desmerecer la importancia que el rigor y la formalización debe ocupar en una carrera de ingeniería.

Esta forma de trabajo estimula la actividad exploratoria y el uso de las representaciones múltiples junto con la necesidad de justificaciones posteriores captan la atención del alumno le da sentido y significado a muchos conceptos relacionados, además que le permite generar nuevos problemas y desafíos.

Esas actividades pueden ser el inicio de una posible propuesta curricular que pretende integrar nuevas tecnologías en la clase de Matemática.

Bibliografía:

1. Aguiar Perera, M. Victoria y Farray y Cuevas, Josefa Isabel (2002). Cultura y Educación en la Sociedad de la Información. Actas de Combyte 2002, 318 pág. A Coruña: Editorial Netbiblo.
2. Alonso, Catalina; Galelgo, Domingo (2003) Informática y praxis educativa. Madrid: UNED.
3. Cabero, J., Cebrián, M., Duarte, A. y otros (coords). (2000). Y continuamos avanzando. Las nuevas tecnologías para la mejora educativa. Sevilla, Kronos.
4. Diaz Barriga, F. (2003): "Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo", en Revista Electrónica de Investigación Educativa, 5 (2). <http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html>.
5. Jacobson, Michael J.; Erlbaum; L. (2000) Innovations in science and mathematics education: advanced designs for technologies of learning. Electronic bk.
6. López Bracho, R. (2006) Matemáticas a través de las Tecnologías de la Información y la Comunicación: Adhibere: "tratamiento interactivo de la resolución de problemas" Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Número 5, páginas 125 – 137.
7. Martínez Sánchez, F. y Prendes, M.P. (coordinadores) (2004) Nuevas tecnologías y educación. Madrid, Pearson/Prentice/Hall.
8. Salinas, J. Batista, A. (2001) Didáctica y tecnología educativa para una universidad en un mundo digital. Universidad de Panamá, Facultad de Ciencias de la Educación.
9. Salinas, J. (2004) Cambios metodológicos con las TIC. Estrategias Didácticas y entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje. Bordón: Revista de orientación pedagógica.
10. Stewart, J. (2006). Cálculo. Conceptos y Contextos. Tercera Edición. Thomson.
11. Iraola y otros (2004). Manual MAPLE versión 9.5, Universidad de Navarra.
12. Burden, R., Faires, J. (1998) Análisis Numérico. 6ta. Edición. International Thomson Editores.