

# UTILIDAD DEL GEOGEBRA PARA PROMOVER UNA DEMOSTRACIÓN

FERREYRA, Nora; CASTRO, Nora; SCARÍMBOLO, Daniela; RECHIMONT, Estela  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Universidad Nacional de La Pampa

## Resumen

La demostración es una de las características de la actividad matemática y se considera esencial su presencia en el diseño curricular de Matemática de todos los niveles educativos.

Distinguimos dos objetivos primordiales y profundamente ligados dentro del tratamiento de la demostración en la clase de Matemática: demostrar para convencer y demostrar para comprender. Numerosos investigadores han tratado este tema y categorizado de diversas maneras las producciones de los estudiantes al enfrentarse con problemas por demostrar.

Para los docentes, constituye un dilema proponer actividades cuya resolución natural sea la exploración y la formulación de conjeturas, que provoquen en los estudiantes la necesidad de recurrir a una demostración. Pensamos el uso del software como metodología que los incentive a pensar, debatir y ocuparse de la producción de pruebas en torno a una solución visualizada en la computadora.

En este trabajo, a partir de un problema geométrico cuyo estudio puede abordarse desde distintos marcos, se analizan las posibilidades de aplicación del software GeoGebra en su resolución, de manera que facilite la producción de conjeturas y la discusión acerca de algún tipo de pruebas.

A partir de la exploración dinámica, observamos en los estudiantes una evolución en el tratamiento de esta situación y una predisposición a la experimentación, controlando diversas condiciones y parámetros en la búsqueda de un enunciado y su correspondiente justificación.

**Palabras Clave:** Problema, Conjeturas, Demostración, GeoGebra,

**Eje Temático:** Procesos de enseñanza-aprendizaje basados en las nuevas tecnologías y servicios web

## Introducción

La demostración es inherente a la actividad matemática y se considera esencial su presencia en el diseño curricular de Matemática de todos los niveles educativos.

Con frecuencia, se consideran sinónimos los verbos explicar, probar y demostrar y, por tal motivo, se utilizan indistintamente. Sin embargo, cada uno de ellos está centrado en un nivel de actividad diferente por parte de los estudiantes.

Según Piaget, en las ciencias deductivas, *explicar* es buscar las razones para “responder a la pregunta del por qué”, sin embargo, desde la práctica de las matemáticas, explicar es dar las justificaciones de un teorema, describirlo y demostrarlo señalando exigencias distintas.

Según Balacheff, para el sujeto locutor, la explicación establece y garantiza la validez de una proposición; se arraiga en sus conocimientos y pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por el locutor a través del lenguaje natural. El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad. Esta posición no es definitiva; con el tiempo puede evolucionar con el avance de los saberes en los cuales se apoya. La demostración en cambio se independiza del contexto social, se trata de un tipo particular de prueba, una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas.

Balacheff también se detiene en el análisis de los procesos de validación. Considera que razonamiento es la actividad intelectual (no siempre explícita) que manipula la información dada o adquirida, para producir una nueva información. Cuando esta actividad tiene por objeto asegurar la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación, se la denomina proceso de validación.

El proceso de validación constituye una etapa fundamental para la acción de decidir acerca de la veracidad de una aserción.

El nivel de validación manifestado por un estudiante a través de su producción, se encuentra limitado por el contexto en el que opera y por la naturaleza de sus conocimientos.

Cuando el razonamiento empleado, tiene un carácter social, en el cual los medios utilizados son abiertos y el principal objetivo es obtener la adhesión de un compañero, es decir convencerlo, esta actividad se denomina argumentación.

La posibilidad de visualización que actualmente ofrecen diversos softwares, favorece la interacción social y la argumentación y suele constituirse en un instrumento de motivación para lograr la formulación de conjeturas y su posterior demostración.

Para favorecer esta confrontación de ideas y el hábito de construir argumentaciones como paso previo a la demostración matemática, resulta conveniente proponer a los estudiantes situaciones adecuadas optimizando el uso de los recursos didácticos.

El software GeoGebra constituye un recurso didáctico tecnológico para la enseñanza, con el que se pueden trabajar conceptos que provienen de la Geometría, el Álgebra y el Cálculo. Permite realizar diversas construcciones y modificarlas posteriormente, lo cual simplifica el uso de estrategias de “prueba y error” en el paso previo a la formulación de un enunciado. A partir de la exploración dinámica de una situación problemática, es posible identificar regularidades, definir parámetros, imponer condiciones y seleccionar tareas con el fin de producir una conjetura, un enunciado y finalmente probarlo.

La barra de herramientas del mencionado software presenta comandos sencillos y la posibilidad de visualizar simultáneamente los registros gráfico y algebraico de las construcciones efectuadas.

Con la intención de facilitar la producción de argumentaciones y fomentar procesos de validación por parte de los estudiantes se plantea el siguiente problema.

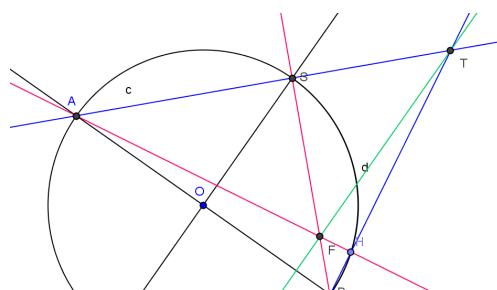
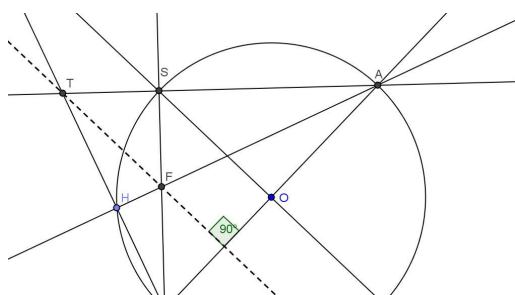
### Problema:

Construir una circunferencia de centro  $O$ . Sean  $AB$  y  $SJ$  dos diámetros perpendiculares; en el arco menor  $BS$  tomar  $H$  variable. Para cada  $H$  se determinan  $F$ , la intersección entre  $AH$  y  $SB$  y  $T$  la intersección entre  $SA$  y  $BH$ .

- Analizar la relación entre las rectas  $TF$  y  $AB$
- Hallar el lugar geométrico del circuncentro de  $FSH$ .

### Resolución

- Los estudiantes comenzaron realizando un análisis con lápiz y papel, en un gráfico particular, y observaron una supuesta perpendicularidad entre  $TF$  y  $AB$ . Sin embargo, para trabajar en pos de una generalización, resultaba poco práctico hacer distintos gráficos para diferentes posiciones de  $H$ . En este momento, se propuso la utilización del software, resaltando sus ventajas como una herramienta para facilitar y visualizar las diferentes construcciones.



A partir de las construcciones y observaciones realizadas, se generaron varios enunciados cuya demostración, en algunos casos, constituye una etapa previa a la confirmación de la conjetura.

- Las rectas  $SA$  y  $SB$  son perpendiculares.
- Las rectas  $AH$  y  $HB$  son perpendiculares.
- El triángulo  $STF$  es rectángulo isósceles.
- $SB$  y  $AH$  son alturas del triángulo  $ATB$ .

Una de las ventajas que ofrece el GeoGebra es la posibilidad de dejar registrado el movimiento de un punto, o un conjunto de puntos, mediante la opción “activar rastro” (ver Figura 3). De esta forma, se pueden observar las modificaciones que sufren las rectas en cuestión, al modificar la posición del punto  $H$ .

Una de las producciones obtenidas con esa herramienta, en el trabajo con los estudiantes, se muestra en la Figura 4:

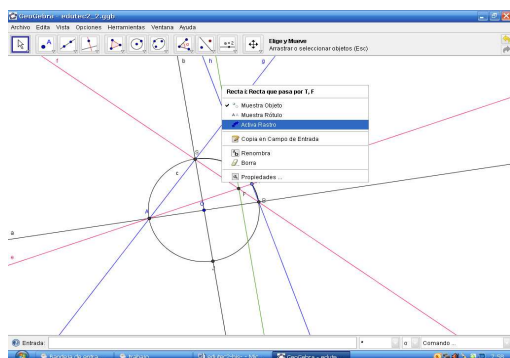


Figura 3

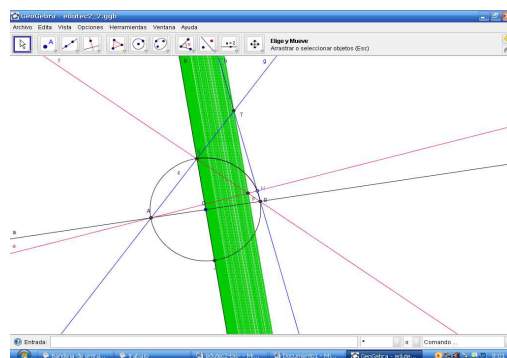
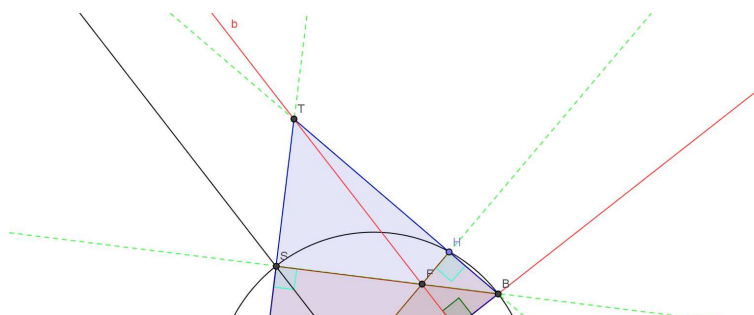


Figura 4

Al cabo de varias pruebas, surgió como decisión la perpendicularidad de las rectas consideradas  $TF$  y  $AB$ , sin embargo, luego de enunciar esta conjetura, fue necesario volver a utilizar lápiz y papel para encadenar una serie de enunciados, identificar argumentos adecuados y formalizar una demostración.



Puesto que, en el triángulo  $ATB$  (ver Figura 5), el punto  $F$  es intersección de las alturas  $SB$  y  $AH$ , dicho punto es ortocentro del triángulo y en consecuencia  $TF$  es parte de la tercera altura. Con lo cual queda demostrado que las rectas  $AB$  y  $TF$  son perpendiculares.

El uso del software, además, permitió modificar algunas condiciones de la construcción y analizar los diferentes resultados, por ejemplo, quitando la condición de perpendicularidad entre los diámetros  $AB$  y  $SJ$  o al ampliar el recorrido del punto  $H$  a toda la circunferencia, las rectas  $AB$  y  $TF$  siguen pareciendo perpendiculares. Los gráficos que promovieron las conclusiones anteriores pueden observarse a continuación (Figura 6, Figura 7, Figura 8 y Figura 9).

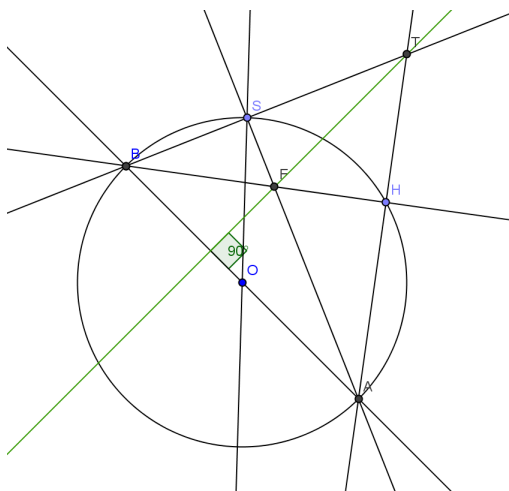


Figura 6

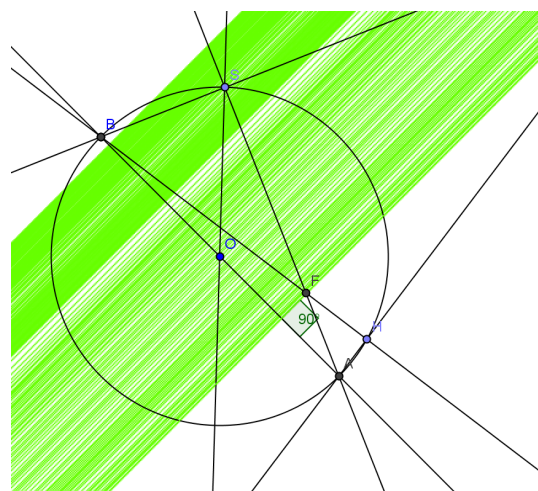
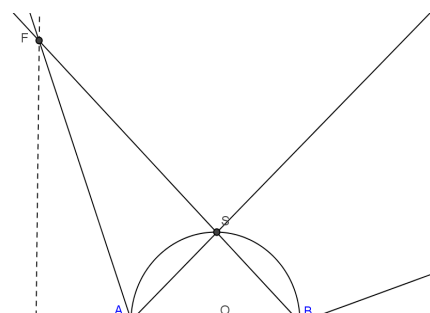
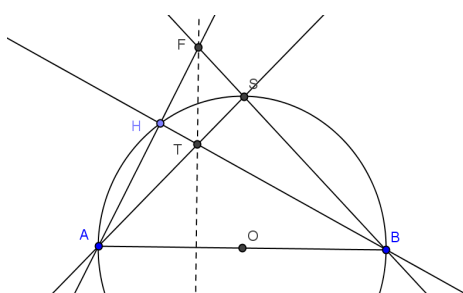


Figura 7



El recurso tecnológico utilizado provocó en los estudiantes, no sólo procesos de búsqueda sino que además les brinda la posibilidad de chequear que todos los casos particulares considerados con el software quedan incluidos en la demostración realizada con lápiz y papel.

- b) Con respecto a la segunda consigna, el trabajo es de naturaleza diferente, puesto que no se requiere la elaboración de una conjetura ya que el desarrollo desde la geometría analítica implica la obtención del lugar geométrico pedido.

El software proporciona distintas herramientas para analizar la resolución y corroborar el resultado analítico hallado. Por un lado, es posible utilizar la herramienta *lugar geométrico* con la cual se lo obtendrá directamente (ver Figura 10), por el otro, es posible *activar el rastro* de un punto seleccionado, en este caso el circuncentro  $E$ , para observar cómo resulta el lugar geométrico del mismo al modificar la ubicación de  $H$  (ver Figura 11).

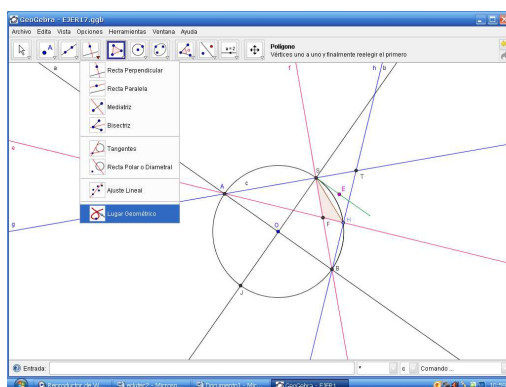


Figura 10

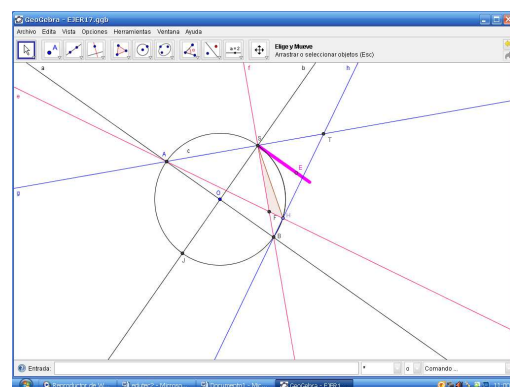


Figura 11

Tal como sucedió en el apartado a), el trabajo con el software genera múltiples enunciados. Por ejemplo, una de las conjeturas observada y formulada por los estudiantes fue la referida a las características del lugar geométrico al extender el movimiento de  $H$  a toda la circunferencia. Como se observa en las Figura 12 y Figura

[illegible][illegible]

En el proceso de validación, con el apoyo del software, notamos que pueden producirse nuevas observaciones y conclusiones, abriendo posibilidades para la discusión y elaboración de demostraciones.

## Comentarios finales

En el caso de problemas geométricos como el presentado, resulta evidente la utilidad de contar con un software que permita visualizar propiedades y resultados y facilite la posterior formulación de conjeturas que concluya en un proceso de demostración.

En el desarrollo de las actividades se observó que con la utilización de GeoGebra, se logra motivación e interés en los estudiantes. Además este tipo de problemas de demostración estimularon la interacción social, dado que a través de la observación se realizaron conjeturas que los estudiantes debieron justificar o explicar a sus compañeros.

El trabajo en el aula resultó ser un medio apropiado para la comunicación, aunque no siempre el debate generó interacciones favorables. Apareció un obstáculo específico en el momento de la discusión y la argumentación: el convencimiento de que una representación gráfica es suficiente para asegurar la validez de una conjetura.

Para lograr una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas, es decir, una demostración los estudiantes debieron, recurrir al lápiz y papel.

Creemos que actividades de este tipo favorecen la ruptura entre las pruebas pragmáticas, en las cuales alcanza con la observación, y las pruebas intelectuales cuya eficacia se basa en el rigor.

Por otro lado estas experiencias, promueven mejores aprendizajes tanto en lo cognitivo como en lo afectivo y/o actitudinal.

### **Bibliografía**

- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas*. Una empresa docente, Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia
- Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación, *La lettre de la Preuve. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Extraído el 20 de noviembre de 2008 desde <http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html>
- Puig Adam, P. (1965). *Curso de Geometría Métrica*. Nuevas Gráficas S.A., Madrid.