

Lugar Geométrico a través de GeoGebra

Scarimbolo, Daniela; Rechimont, Estela; Ferreyra, Nora; Castro, Nora

Universidad Nacional de La Pampa – Argentina

Resumen

El concepto de lugar geométrico resulta, a veces, complejo en su determinación y tal vez se deba a la posibilidad de representación en distintos registros que implican diferentes niveles de abstracción y significados. Ante situaciones relacionadas a la temática de lugar geométrico, se ponen de manifiesto la existencia de dificultades para expresar el problema en un registro algebraico que caracterice el conjunto de puntos correspondiente.

Las representaciones matemáticas se entienden como herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, con las cuales los sujetos registran y comunican su conocimiento. Consideramos que a partir de la visualización de la resolución en un registro gráfico, con las componentes dinámicas que puede ofrecer un software, se facilitaría la obtención de la expresión algebraica correspondiente.

El presente trabajo analiza la propuesta de una serie de situaciones problemáticas a resolver por estudiantes de los primeros años de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, pensadas con la intención de facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de lugar geométrico. Dichas actividades, basadas en la utilización del software GeoGebra, permiten anticipar la solución resignificando los conceptos previos en la búsqueda de la solución.

Palabras Clave: Problema, Lugar Geométrico, Representación, GeoGebra.

Eje Temático: Procesos de enseñanza-aprendizaje basados en las nuevas tecnologías y servicios web

Introducción

Investigaciones en el área de Educación Matemática señalan que el análisis y estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se desarrollan, en muchos casos, alrededor del uso de nociones semióticas y de representación.

Según Raymond Duval (1995), no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de *representación* en Matemática.

Las herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, con las cuales los sujetos registran y comunican su conocimiento, son llamadas “representaciones matemáticas”.

En el abordaje de un concepto, se recurre a varios registros semióticos de representación, algunos de los cuales han sido desarrollados específicamente para el tratamiento de cuestiones matemáticas; así, distintas estructuras adquieren significado para el sujeto a través del trabajo con las representaciones, y es por ello que éstas resultan de gran interés didáctico.

Dentro de las formas convencionales de representación es común distinguir dos familias de sistemas: *representaciones simbólicas* y *representaciones gráficas* (Rico, 2000).

Las *representaciones simbólicas* incluyen representaciones de carácter alfanumérico; en este sentido, en matemática se han desarrollado representaciones particulares tales como el álgebra y el sistema numérico posicional.

Las *representaciones gráficas* incluyen las representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico y su sintaxis viene dada por reglas de composición y convenios de interpretación. La representación pone en consideración el objeto *representante* (símbolo o representación) y el objeto *representado* (conceptos o contenidos conceptuales) que Godino y Batanero (1994) denominan, respectivamente, *significante* y *significado*.

Duval (1995) plantea dos cuestiones principales en torno al aprendizaje de las matemáticas: las ventajas de implementar cambios de registro y la necesidad de no confundir los objetos matemáticos con su representación. Al mismo tiempo, define los registros de representación como un medio de expresión que se caracteriza por signos propios y la forma en que estos se organizan. Dichos registros constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivar, dentro de sus propias estructuras, una idea aún confusa, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor. Considera tres fenómenos estrechamente vinculados y que deben tenerse en cuenta en la relación de enseñanza-aprendizaje:

- *Diversificación de los registros de representación semiótica.*
- *Diferenciación entre representante y representado.*
- *Coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica.*

La comprensión de un concepto matemático pone de manifiesto la interacción de diferentes registros de representación y la necesaria coordinación de los mismos. La representación en un solo registro difícilmente da la posibilidad de una comprensión integral del concepto.

En el análisis que realizamos, en particular, sobre un problema propuesto a estudiantes de la carrera Profesorado en Matemática, se han considerado las siguientes entidades:

- *Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos, tanto oral como escrito).*
- *Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas, intramatemáticas, ejercicios).*
- *Conceptos: Definiciones o descripciones (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, ...).*
- *Propiedades: Enunciados o proposiciones.*

Además, en la solución del problema considerado, hemos identificado elementos ostensivos, extensivos e intensivos.

Los elementos ostensivos son cualquier representación material utilizada en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos) y las entidades lingüísticas/notacionales.

Los elementos extensivos incluyen entidades fenomenológicas como situaciones-problemas, aplicaciones.

Los elementos intensivos son las ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, proposiciones, teorías).

Experiencia

En general, un problema es una situación que ubica a quien lo resuelve ante la necesidad de desplegar su actividad cognitiva en una experiencia de búsqueda de estrategias, elaboración de conjeturas y toma de decisiones. En un problema podemos identificar las siguientes características: existe un objetivo claramente definido; la solución no es inmediata ni alcanzable mediante procedimientos rutinarios sino que, por el contrario, requiere reflexión y coordinación de experiencias y conocimientos previos para acceder a un resultado y,

finalmente debe ser accesible al sujeto que está intentando resolverlo, es decir que éste pueda identificar posibles soluciones y elegir entre ellas la más adecuada.

El concepto de lugar geométrico en matemática resulta, a veces, para algunos estudiantes, complejo en su determinación y ello tal vez se deba a una escasa coordinación entre distintos registros de representación. Una adecuada coordinación de dichos registros puede brindar la posibilidad de generar diferentes niveles de abstracción y significados.

En situaciones de enseñanza-aprendizaje y, considerando la temática de lugar geométrico, hemos observado que los alumnos, generalmente, presentan la situación propuesta en un registro gráfico evidenciando dificultades para expresarla en un registro algebraico que permita justificar las conjeturas elaboradas a priori.

Para aproximarnos a la investigación en torno a la comprensión de conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas, se trabajó con un grupo de alumnos del Profesorado en Matemática que cursan el segundo año de la carrera en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. Estos estudiantes ya han cursado asignaturas básicas por lo que cuentan con conocimientos de Álgebra y Análisis.

Se presentaron a los estudiantes, entre otros, los siguientes problemas de Lugar Geométrico.

1. Dado un segmento AB , considerar un punto arbitrario M en el interior del mismo. Construya los cuadrados $AMCD$ y $MBEF$ ambos en el mismo semiplano con respecto a la recta AB . Las circunferencias circunscritas a estos cuadrados con centros en P y Q respectivamente, se cortan en M y en un segundo punto N . Sea N' la intersección de las rectas AF y BC .

a) Analice la relación entre N y N'

b) Halle el lugar geométrico del punto medio del segmento PQ cuando M varía en AB .

2. Construya una circunferencia de centro O . Sean AB y SJ dos diámetros perpendiculares, en el arco menor BS tomar H variable. Para cada H se determinan F , la intersección entre AH y SB y T la intersección entre SA y BH . Halle el lugar geométrico del circuncentro de FSH .

3. Sea C una circunferencia de centro O y diámetro \overline{AB} . M un punto sobre la circunferencia y R la recta tangente a C por M . Sea M' el punto de intersección de esta tangente con la recta paralela a \overline{AM} que pasa por O . Determinar el lugar geométrico de los puntos M' cuando M recorre C .

Del conjunto de problemas considerado hemos seleccionado uno para presentar.

Problema:

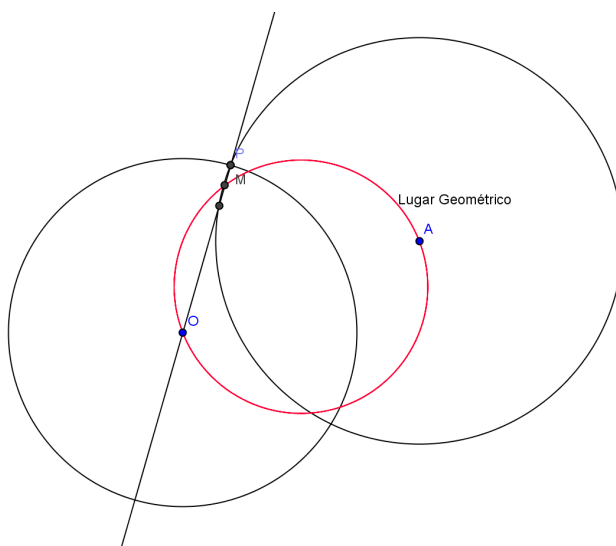
Sea C una circunferencia de centro O y A un punto exterior a dicha circunferencia.

Sea P un punto sobre C . Se traza la circunferencia D , de centro A que pasa por P y la recta r que pasa por O y P . La recta r corta a D en dos puntos (uno de ellos es P).

Sea M el punto medio de estos dos puntos. Halle el lugar geométrico de M al variar P sobre C .

Resolución a priori:

Primeramente se trabajó en registro gráfico. Para ello se realizaron construcciones con regla y compás y posteriormente se utilizó el software GeoGebra que permite visualizar el lugar geométrico a través de la herramienta “Lugar Geométrico” o bien la opción de animación. Se muestra a continuación, el gráfico obtenido mediante el software donde claramente se visualiza la solución al problema.

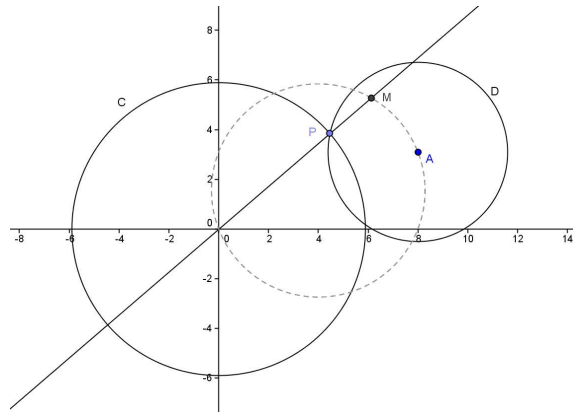


En el registro algebraico, se confirma la solución hallada gráficamente.

Centramos en un sistema de ejes la circunferencia C . Sean $P = (x_p, y_p)$ y $A = (a, b)$.

Señalamos como R la recta que pasa por los puntos O y P y como D la circunferencia con centro en A que pasa por P . Los lugares geométricos R , D y C podemos expresarlos

como: $R : y = \frac{y_p}{x_p} x$, $D : (x - a)^2 + (y - b)^2 = t^2$, $C : x^2 + y^2 = r^2$.



Resolviendo un sistema de ecuaciones determinamos la intersección entre R y D

$$(x-a)^2 + \left(\frac{y_p}{x_p} x - b \right)^2 = t^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + \frac{y_p^2}{x_p^2} x^2 - 2b \frac{y_p}{x_p} x + b^2 = t^2$$

$$\left(1 + \frac{y_p^2}{x_p^2} \right) x^2 + \left(-2a - 2b \frac{y_p}{x_p} \right) x + a^2 + b^2 - t^2 = 0$$

Las soluciones obtenidas al resolver la ecuación cuadrática son:

$$x_1, x_2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \text{ donde } A, B \text{ y } C \text{ son los coeficientes de los términos}$$

cuadrático, lineal e independiente, respectivamente. El punto medio entre las dos raíces será la coordenada x del punto M .

$$\begin{aligned} \therefore x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} &= -\frac{B}{2A} = \frac{2a + 2b \frac{y_p}{x_p}}{2 \left(1 + \frac{y_p^2}{x_p^2} \right)} = \frac{\frac{ax_p + by_p}{x_p}}{\frac{x_p^2 + y_p^2}{x_p^2}} \stackrel{\substack{\text{simplificando} \\ \text{y sacando común} \\ \text{denominador}}}{=} \frac{\frac{ax_p + by_p}{x_p} \cdot \frac{x_p^2}{x_p^2 + y_p^2}}{\frac{x_p^2}{x_p^2 + y_p^2}} \stackrel{\substack{x_p^2 + y_p^2 = r^2 \\ \text{simplificando}}}{=} \frac{x_p(ax_p + by_p)}{r^2} \\ y_M &= \frac{y_p}{x_p} x_M = \frac{y_p(ax_p + by_p)}{r^2} \end{aligned}$$

Puesto que contamos con la resolución en un marco gráfico, conjeturamos que M está en una circunferencia con centro en el punto medio entre O y A .

Calculamos:

$$\left(x_M - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y_M - \frac{b}{2} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= x_M^2 - ax_M + \frac{a^2}{4} + y_M^2 - by_M + \frac{b^2}{4} = \\
&= \frac{x_p^2 (ax_p + by_p)^2}{r^4} - \frac{ax_p (ax_p + by_p)}{r^2} + \frac{a^2}{4} + \frac{y_p^2 (ax_p + by_p)^2}{r^4} - \frac{by_p (ax_p + by_p)}{r^2} + \frac{b^2}{4} = \\
&= \frac{(ax_p + by_p)^2}{r^4} (x_p^2 + y_p^2) - \frac{(ax_p + by_p)(ax_p + by_p)}{r^2} + \frac{a^2 + b^2}{4} = \\
&= \frac{(ax_p + by_p)^2}{r^2} - \frac{(ax_p + by_p)^2}{r^2} + \frac{a^2 + b^2}{4} = \\
&= \frac{a^2 + b^2}{4}
\end{aligned}$$

$\therefore M \in K$, circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ y radio k , con $k^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$.

Analizando desde un marco geométrico, observamos que M es punto medio de una cuerda, por lo cual el segmento \overline{MA} es perpendicular a dicha cuerda y en consecuencia a la recta R . Entonces, el lugar geométrico de M es el lugar geométrico del vértice de los ángulos rectos cuya hipotenusa es \overline{OA} . Luego, el lugar geométrico buscado son las dos semicircunferencias con diámetro \overline{OA} .

Análisis Didáctico de la Solución del Problema

El enunciado del problema es el elemento extensivo y el correspondiente registro semiótico es un registro verbal.

A partir del enunciado, la imagen mental de la situación planteada se representa mediante un registro figural que funciona, en cierta forma, como punto de partida para los distintos registros de representación involucrados en la solución.

Para estudiar la conversión de uno a otro registro es necesario conocer las reglas lógicas que sustentan el trabajo en cada uno de ellos. En el análisis precedente se han explicitado distintos registros y la coordinación existente entre ellos.

Este análisis permite identificar:

* Puntos críticos implícitos en la resolución. Por ejemplo, la ubicación de la circunferencia inicial en un sistema de coordenadas ortogonales o la consideración de parte de la recta como una cuerda de la segunda circunferencia.

- * La necesidad de ciertos conocimientos previos. Por ejemplo conceptos básicos de geometría analítica, solución de sistemas de ecuaciones, propiedades de las circunferencias.
- * Las dificultades presentadas en el desarrollo de las ecuaciones desde el punto de vista de la geometría analítica.
- * La simplicidad de la interpretación desde la geometría sintética.
- * Estrategias didácticas diversas para prever las posibles soluciones a presentar por parte de los estudiantes.
- * Relaciones establecidas entre los distintos registros de representación

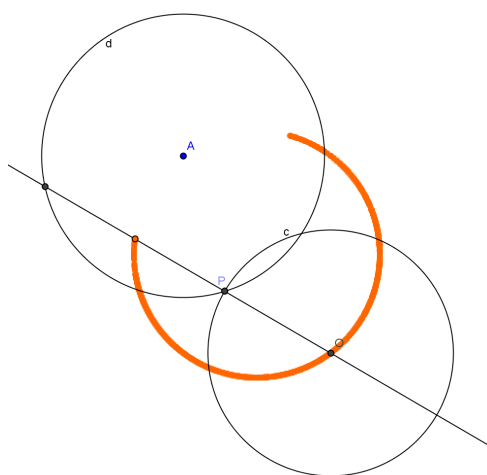
Producción de los alumnos

La tarea propuesta se entregó a 8 (ocho) estudiantes, éstos en su mayoría resolvieron el problema en el registro gráfico-geométrico y no lograron, en principio, justificar su conjetura en un registro algebraico.

Algunos estudiantes intentaron el cambio de registros de representación pero la conversión entre los dos registros no se realizó de manera adecuada o resultó incompleta. Otros estudiantes sólo efectuaron el desarrollo en el registro gráfico y concluyeron a partir de éste sin evidenciar seguridad en su respuesta.

Con una representación incompleta y en un solo registro, resulta muy difícil lograr la comprensión integral de un concepto y ello se manifiesta en la mayoría de los trabajos analizados.

A partir de la resolución con el software GeoGebra, los estudiantes introdujeron variantes en el proceso de resolución y se animaron a conjeturar animadamente acerca del resultado que surge del registro gráfico.



Conclusiones

El análisis a priori realizado para el problema presentado, pone de manifiesto una solución en registros gráfico, geométrico y algebraico utilizando representaciones de uso frecuente por parte de los alumnos y con un mayor rendimiento a partir de la utilización del software específico.

Creemos que este tipo de análisis es útil para describir los procesos de interpretación y comunicación del saber matemático, e identificar las razones que pueden condicionar la actividad de aprendizaje.

El equipo de investigación, a priori, esperaba que la resolución del problema planteado se realizara en un marco algebraico. Sin embargo, los alumnos no lograron bosquejar un desarrollo algebraico y prácticamente ni lo intentan.

Se puso de manifiesto que el trabajo de los estudiantes se realiza fundamentalmente en un registro gráfico-geométrico y que la utilización de herramientas algebraicas no surge espontáneamente, aún cuando dichas herramientas hayan sido consideradas explícitamente en asignaturas anteriores. En el caso considerado, la posibilidad de observar la construcción de la circunferencia como resultado del trazado del rastro con GeoGebra, desencadenó la búsqueda de la expresión algebraica correspondiente.

La utilización del software para proporcionar un registro gráfico, promueve la comprensión de la situación a un nivel intuitivo y facilita la búsqueda de la coordinación entre distintos registros y la entrada a un mayor nivel de abstracción.

Consideramos que es importante proponer problemas que permitan que los estudiantes adquieran habilidades en el tratamiento de distintos registros de representación y la correspondiente conversión entre ellos, como condición necesaria, no sólo para resolver problemas sino para procurar el desarrollo del pensamiento matemático.

Bibliografía

1. Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang S.A., Editions Scientifiques Européennes.
2. Puig Adam, P. (1965). *Curso de Geometría Métrica*. Madrid, España: Nuevas Gráficas S. A.
3. González, F. (2001). *Cómo desarrollar clases de matemática centradas en Resolución de Problemas*. Caracas, Venezuela: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

4. Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. Contreras et al. (Eds) *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.219-231). Huelva, España: Publicaciones Universidad de Huelva.