

Elaboración de material de Cátedra para el proceso de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias usando herramientas computacionales

María Eva Ascheri, Rubén Adrián Pizarro

Eje temático: Procesos de enseñanza-aprendizaje basados en las nuevas tecnologías y servicios web.

## INTRODUCCIÓN

Sin lugar a dudas, dentro de las asignaturas curriculares universitarias que más se benefician con el uso de herramientas computacionales se encuentran las materias científicas y dentro de ellas, la Matemática. Es conocido que ha habido -y aun hay, en menor grado- cierta resistencia al uso de estas herramientas en las clases de Matemática, debido al preconcepto de que esta disciplina, por su grado de abstracción, debía desarrollarse con lápiz y papel. Pero esta problemática se ha ido superando gradualmente, prevaleciendo la necesidad del uso de la computadora como herramienta de apoyo al desempeño docente. Adicionalmente, el surgimiento de software matemático como nuevo recurso informático ha ido disminuyendo tal resistencia original puesto que posibilitan la interacción, un factor esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Existen varios paquetes de programas en el ámbito educativo que se han ido utilizando según su predominio en el medio académico, algunos comerciales y otros libres. Entre ellos podemos citar: Derive, Matlab, Maple, Mathematica, Scilab, Gauss, Octave, Máxima. Se trata de programas que resuelven, calculan, simplifican, desarrollan en series y grafican expresiones del Álgebra y del Cálculo por medio de símbolos. Son utilizados por investigadores y docentes. Han tenido un impacto importante en la enseñanza de asignaturas del área de Matemática Aplicada, como Cálculo Numérico. Constituyen un excelente ambiente de aprendizaje y por ende, totalmente aplicables en las clases de Matemática. Es imposible resumir aquí las posibilidades que se abren con estas herramientas para la exploración de conceptos y procedimientos matemáticos.

La alternativa del uso de un software de ese tipo es utilizar un programa escrito en uno de los lenguajes de nivel superior: Visual Basic, Pascal, Fortran, C, C<sup>++</sup>, entre otros, los cuales trabajarán de manera más eficiente que los anteriores, si el problema a abordar es de mayor complejidad. Son de gran uso en Matemática y en general, en las disciplinas científicas -como Cálculo Numérico-, y la característica fundamental de éstos se resume en “enseñarle matemática a la computadora”.

Creemos que para desarrollar cursos básicos de Matemática en el nivel universitario, los software matemáticos le ofrecen al docente muy buenos recursos para generar nuevas y eficaces prácticas educativas. Son excelentes procesadores simbólicos que permiten la implementación de programas desarrollados por los usuarios.

Sin dudas, el uso adecuado de las herramientas computacionales para la enseñanza en el ámbito universitario de las asignaturas aplicadas como Cálculo Numérico, favorece a la participación, creatividad, aprendizaje significativo y motivación por parte del

estudiante (Alemán de Sánchez, 1999; Ausubel y Novak, 1978). Esto permite plantearse objetivos más ambiciosos y afrontar el análisis de problemas más realistas y complejos que, de otra forma, resultarían muy difíciles o imposibles de trabajar en un curso universitario introductorio, bien por su dificultad intrínseca, bien por la falta de tiempo suficiente. Por otro lado, el uso de software científico contribuye a que las materias resulten más atractivas al estudiante debido a que su relación con la computadora es más activa que en las clases convencionales. También permite al estudiante disponer de más tiempo al no tener que realizar tantos cálculos repetitivos, lo que hace que pueda dedicarse más a comprender los conceptos, las ideas y las aplicaciones. Las ventajas del uso de herramientas computacionales son entonces enormes e innegables.

En base a lo expuesto anteriormente, elaboramos material de Cátedra para el proceso de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) usando herramientas computacionales. Utilizaremos este material en la asignatura Cálculo Numérico que dictamos para estudiantes de varias carreras de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina. Mostramos aquí algunas actividades de aplicación en las cuales se pretende utilizar un software matemático libre y de código abierto -Octave, en este caso- para crear una práctica interactiva de las EDO, teniendo en cuenta que este método de enseñanza puede aplicarse a otras ramas del conocimiento científico. Es claro que el éxito de la metodología que se emplee está supeditada a cómo el educador la implementa, esto es, a cómo el educador crea nuevos ambientes de aprendizaje para explotar al máximo las herramientas computacionales que provee la tecnología informática al ambiente educativo y por ende, obtener el mayor rendimiento en términos pedagógicos.

## **DESARROLLO**

En algunas áreas de la Matemática, la computadora se convierte en una herramienta indispensable debido a la cantidad de problemas que no pueden resolverse analíticamente pero sí numéricamente, como sucede con la mayoría de los problemas de la vida real. Surge de este modo la necesidad de dar una formación básica en Cálculo Numérico a los estudiantes universitarios de carreras científicas (Ascheri y Pizarro, 2007; Chapra y Canale, 2007; Gerald y Wheatley, 2000).

En la enseñanza de Cálculo Numérico, lo primero a tener en cuenta es la experimentación (Soler-Selva y cols., 2004). Sin ella no se puede llegar a una comprensión global del funcionamiento de los métodos, fundamentalmente cuando no es posible realizar un análisis teórico de los mismos y tampoco es deseable en una

formación que debe ser predominantemente práctica. Para que un alumno entienda cómo trabaja un método, debe utilizarlo en la práctica. Pero la experimentación numérica, ya sea a mano o con calculadora, no muestra la verdadera utilidad de los métodos. Los cálculos se convierten en algo engorroso, tedioso y aburrido, con posibilidades de cometer grandes errores. Los métodos pierden la agilidad que los debe caracterizar. Surge entonces, la necesidad innegable de utilizar una computadora para que realice estos cálculos. Pero una computadora es esencialmente torpe, por lo que es necesario proporcionarle instrucciones completas y detalladas para cada paso que deba ejecutar. En otras palabras, debe escribirse un programa en algún lenguaje específico de computación para que la computadora pueda realizar el análisis numérico. De aquí que el segundo aspecto a considerar en Cálculo Numérico es la implementación informática de los métodos. Pero un alumno que está realizando un curso básico de Cálculo Numérico, por lo general, no está capacitado para hacerlo, al carecer de conocimientos suficientes sobre lenguajes de programación. Sin embargo, hemos encontrado en los software matemáticos una herramienta de gran utilidad a la hora de que estudiantes sin experiencia programadora en lenguajes avanzados experimenten con los métodos numéricos. Consideramos importante que los alumnos sean capaces de aplicar los conceptos relativos a los métodos numéricos, y tengan la capacidad de diseñar programas propios relativos a los algoritmos numéricos correspondientes. Estamos convencidos que los estudiantes, una vez que cuentan con la teoría necesaria y con ejemplos ilustrativos, aprenden y entienden mejor los métodos numéricos intentando por sí mismos formular y someter a prueba los programas que resulten de ellos.

En resumen, las computadoras, un software matemático y los métodos numéricos proporcionan una alternativa para cálculos muy complejos, y son herramientas extremadamente poderosas para la solución de problemas científicos y tecnológicos. Pero son los educadores los que deben ocuparse de crear con estas herramientas un ambiente de aprendizaje que colabore con las tareas que les son propias y que favorezca el aprendizaje de los estudiantes (Mena Marchan y Porras, 1994; Rivera Porto, 1997). Para ello, proponemos seguir la siguiente metodología en la enseñanza-aprendizaje de temas de Cálculo Numérico:

1. **Desarrollo de contenidos teóricos:** para sistematizar los conocimientos curriculares y las herramientas computacionales que se utilizarán.
2. **Resolución de ejercicios:** para afianzar la teoría y las técnicas que se emplearán.
3. **Resolución de actividades:** para profundizar y consolidar la teoría, realizando pruebas y descubrimientos -simulaciones interactivas-.

En el caso que aquí nos ocupa, abordaremos el tema *solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias*. En experiencias previas (Ascheri y Pizarro, 2008) hemos utilizado esta metodología en varios de los temas de Cálculo Numérico, obteniendo resultados positivos para la Cátedra. Es claro que esta metodología de enseñanza-aprendizaje puede adaptarse fácilmente a otras asignaturas del conocimiento científico. Tanto para la resolución de los ejercicios y las actividades propuestas en el material de la asignatura, los alumnos dispondrán de herramientas tecnológicas como la calculadora, la computadora y el software libre Octave (Ascheri y cols., 2006; Borrell Nogueras, 2008; Eaton, 1997). Estos recursos les facilitarán la realización de cálculos - complejos y repetitivos en algunos casos- y les permitirán verificar y contrastar los resultados obtenidos. La computadora y el software les permitirán practicar un sinnúmero de veces los diferentes algoritmos de exploración de métodos numéricos que habrán estudiado de forma teórica.

En la siguiente sección, mostramos algunas actividades que ilustran la utilización del software Octave en la implementación y experimentación de métodos numéricos. Estas actividades forman parte del material de Cátedra elaborado con el objetivo de afianzar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las EDO usando herramientas computacionales. Teniendo como base experiencias de Cátedra anteriores (Ascheri y Pizarro, 2008), esperamos que los programas que desarrollen los alumnos en Octave permitan estudiar el comportamiento de los métodos numéricos empleados, con suficiente profundidad y de forma rápida y sencilla, con no demasiados conocimientos de programación, pudiendo, además, obtener datos adicionales del problema sin excesiva dificultad.

### **Material de Cátedra elaborado para el proceso de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias usando herramientas computacionales**

Para la elaboración de este material, suponemos que los alumnos tendrán conocimientos básicos de Octave y de los métodos numéricos usados. No obstante, contarán con un manual de uso del software y un cuaderno sobre el tema en cuestión, elaborados por los propios educadores, con numerosos ejemplos desarrollados (Ascheri y cols., 2006).

Tomando como punto de partida problemas que pueden ser resueltos numéricamente utilizando la calculadora, esperamos motivar la experimentación de los métodos numéricos empleados a través de la implementación de los programas que realizarán los alumnos. Podrán constatar que la obtención de resultados con el software matemático es mucho más sencilla, rápida y segura, además de permitirles analizar los resultados de forma simultánea. Así mismo, las capacidades gráficas del software posibilitarán una mejor comprensión del comportamiento de los métodos estudiados.

## **Contexto**

**Asignatura:** Cálculo Numérico.

**Número promedio de alumnos:** 20.

**Carreras - Año:** Ing. Civil - 2º; Lic. en Física - 3º; Prof. en Matemática - 3º.

**Tema:** Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Modalidad de cursado:** Promoción sin examen final.

**Régimen:** Cuatrimestral.

**Secuencias didácticas:** 8 secuencias didácticas de dos horas reloj cada una, desarrolladas 4 en el aula y 4 en el laboratorio.

**Forma de trabajo en el laboratorio:** En grupos de no más de tres integrantes por grupo. Cada uno de los grupos deberá armar un informe escrito sobre las actividades que se les planteen. Finalizadas las secuencias didácticas, cada grupo deberá exponer su informe al resto de la clase en no más de 20 minutos. El docente deberá asistir, guiar y dirigir a los alumnos para que puedan establecer las relaciones conceptuales pertinentes y para que se produzca un intercambio de experiencias que permita aunar criterios y efectuar tareas remediales, si fuesen necesarias. El docente inducirá a la reflexión y puesta en común de la producción de cada uno de los grupos.

Mostramos aquí dos de las actividades que entregaremos a los grupos para que las analicen, resuelvan y hagan el correspondiente informe. Los casos de estudio se han buscado de manera que proporcionen ilustraciones reales de las características y factores de importancia mencionados en las clases teóricas, y que le permitan al alumno alcanzar los siguientes objetivos:

### **Objetivos generales de estudio**

- Asimilar y afianzar los conceptos específicos involucrados para poder transferirlos a situaciones problemáticas de ciencias y de ingeniería.
- Dominar los distintos métodos numéricos, tener la capacidad de valorar la confiabilidad de las respuestas, y ser capaz de escoger “el mejor” método -o métodos- de cualquier problema en particular.
- Utilizar adecuadamente la computadora y el software matemático existente.
- Elaborar programas que puedan usarse en estas -y otras- aplicaciones científicas.
- Desarrollar habilidad y destreza en el procesamiento de información científica.
- Intercambiar experiencias y debatir sobre los resultados obtenidos.
- Mostrar, al alumno y al docente, una evaluación de los saberes enseñados y aprendidos.

### **Objetivos específicos de estudio**

- Graficar las soluciones e interpretar la representación gráfica de las mismas.

- Entender la diferencia entre los errores de truncamiento locales y globales.
- Conocer el orden y la dependencia de los tamaños de paso de los errores de truncamiento para todos los métodos que se describen, y comprender cómo estos errores influyen en la exactitud de los métodos.
- Conocer la diferencia entre los métodos de un solo paso y los de pasos múltiples.

### Actividades planteadas

Estas son algunas de las actividades que plantearemos a los grupos. Con el fin de mostrar la potencialidad del software Octave, incluimos en una de ellas los gráficos correspondiente a dos de los apartados (Figuras 1 y 2).

**Actividad 1.** Nos proponemos:

- Ilustrar el uso de los métodos de Taylor, Euler y Heun.
- Graficar y comparar las soluciones obtenidas con la verdadera. Por ello, se muestra la solución analítica exacta, aunque sea poco factible en la mayoría de los problemas.
- Probar y validar los programas realizados.

**Traectoria de un cuerpo en caída libre.** Se deja caer un objeto de masa  $m = 2kg$  desde un globo de aire caliente. Se quiere calcular la velocidad que alcanza en 3 segundos, suponiendo que la fuerza de fricción debida al aire es directamente proporcional a la velocidad del objeto, es decir,  $F_R = kv$  siendo  $k = 12 \frac{kg}{s}$ . Definiendo

$c = \frac{k}{m} = 6s^{-1}$ , el problema a resolver se escribe:  $\frac{dv}{dt} = g - cv$  en  $[0, 3]$ , con  $v(0) = 0 \frac{m}{s}$ .

- Utilizando sus programas, determine las aproximaciones de Taylor, Euler y Heun para los tamaños de paso  $h = 0.1 s$ ,  $0.05 s$ ,  $0.025 s$ ,  $0.0125 s$ .
- En cada caso, dibuje su solución y la exacta  $v = \frac{49}{30} \frac{m}{s} (1 - e^{-6s^{-1}t})$  en un mismo gráfico.
- De acuerdo a los resultados obtenidos, formule una conclusión.

**Actividad 2.** Nos proponemos:

- Ilustrar el uso del método de Runge-Kutta de orden cuatro para sistemas de EDO.
- Graficar, analizar y comparar las aproximaciones obtenidas.
- Probar y validar el programa elaborado.

**El modelo depredador-presa.** En un cierto hábitat viven conejos y linces, cuyas poblaciones en un instante  $t$  denotamos por  $x(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente. El modelo depredador-presa establece que  $x(t)$  e  $y(t)$  verifican el sistema

$$x'(t) = A x(t) - B x(t) y(t) \qquad y'(t) = C x(t) y(t) - D y(t)$$

Una simulación típica con una computadora usaría como coeficientes  $A = 3$ ,  $B = 0.002$ ,  $C = 0.0006$ ,  $D = 0.5$ .

a) Use el programa que implementa el método de Runge-Kutta para resolver el sistema, con tamaño de paso  $h = 0.1$ , en los siguientes casos:

- i)  $x(0) = 50$  conejos e  $y(0) = 10$  lince en el intervalo  $[0, 10]$ .
- ii)  $x(0) = 900$  conejos e  $y(0) = 1500$  lince en el intervalo  $[0, 20]$ .
- iii)  $x(0) = 5000$  conejos e  $y(0) = 100$  lince en el intervalo  $[0, 4]$ .

b) Para cada caso, dibuje una gráfica de las soluciones de este problema representando ambas poblaciones con el tiempo y formule una conclusión.

A modo de ejemplo, para los casos i) y ii) usando el programa elaborado en Octave, obtuvimos las pantallas que se muestran en las Figuras 1 y 2, respectivamente.

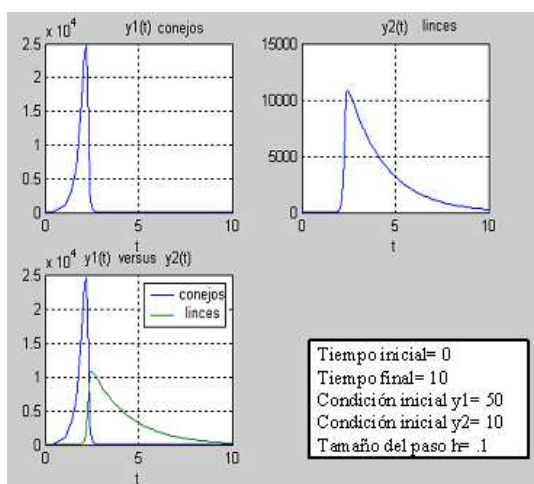


Figura 1

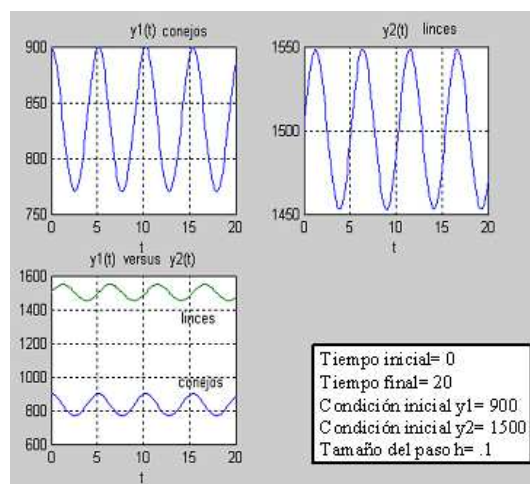


Figura 2

## ACCIONES FUTURAS

Nos proponemos ir enriqueciendo y perfeccionando los documentos y materiales didácticos que disponemos como resultado de la práctica docente y del intercambio de experiencias con otros educadores del ámbito universitario. También, nos proponemos incorporar a nuestras clases el uso de un software educativo que estamos desarrollando, fruto de nuestra experiencia académica, para utilizarlo en Cálculo Numérico y en otras disciplinas científicas (Ascheri y cols., 2010).

## CONCLUSIONES

Mediante la realización de las actividades propuestas, adicionalmente al logro de los objetivos antes enunciados, esperamos que los alumnos logren la retención, la comprensión y el uso activo del conocimiento. Aplicarán el conocimiento del contenido aprendido a actividades que los llevarán a comprometerse activamente durante su desarrollo. De esta forma, lograrán una comprensión profunda de este tema específico,



incrementando la habilidad para usar eficazmente los procesos cognitivos básicos - observar, analizar, formular conclusiones- y favoreciendo el desarrollo de actitudes y disposiciones asociadas con la reflexión.

Con el trabajo en grupo, esperamos fomentar la responsabilidad de cada uno de los integrantes de los grupos y lograr que los alumnos se sientan protagonistas de su aprendizaje, desalentando la formación de alumnos pasivos. Ello ayudará a optimizar el rendimiento académico y a establecer relaciones positivas entre los alumnos.

Con el uso de las herramientas computacionales propuestas para hacer las actividades, esperamos inducir en los alumnos diversos modos de representación, comprensión y conceptualización. Estas herramientas tendrán un papel decisivo en el aprendizaje de la temática aquí abordada, pues permitirán garantizar el control de la acción y la respuesta. La implementación de los métodos numéricos en programas simples será una herramienta de aprendizaje de los mismos, ampliando la habilidad de los alumnos en el uso de la computadora, aumentando la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos. La formación de los conocimientos científicos se logrará a partir del uso progresivo y durante un cierto período de las herramientas empleadas. El educador deberá actuar como guía del aprendizaje, definiendo un punto de equilibrio entre el empleo combinado de las nuevas tecnologías y de los métodos tradicionales, e incentivando al estudiante para que éste realice siempre el esfuerzo de analizar la coherencia de los resultados que está obteniendo y de comprender los fundamentos teóricos y conceptuales en los que se basan dichos resultados.

Entre las ventajas que presupone la metodología propuesta destacamos las siguientes. Nos permite:

- Utilizar nuevos y mejores recursos didácticos.
- Plantear objetivos didácticos más ambiciosos.
- Abordar problemas reales que de otro modo serían difíciles o imposibles de resolver.
- Establecer una mayor conexión entre la enseñanza universitaria y las necesidades del mundo laboral.
- Lograr una mayor motivación de los alumnos por el estudio de Cálculo Numérico y particularmente, de las EDO.

A partir de experiencias previas, pensamos que el uso adecuado de las nuevas tecnologías contribuye en gran medida a que la enseñanza de la Matemática sea más asequible, práctica y creativa.

## BIBLIOGRAFÍA

- Alemán de Sánchez, A. (1999). *La enseñanza de la matemática asistida por computadora*. Recuperado el 05 de noviembre de 2006, de <http://www.utp.ac.pa/articulos/enseñarmatematica.html>.
- Ascheri, M. E., Pizarro, R. A. y Culla, M. E. (2006). *Aplicaciones del lenguaje Octave a problemas de matemática*. Manuscrito no publicado, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa, Santa Rosa, Argentina.
- Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A. (2007). *Cálculo Numérico*. Santa Rosa, Argentina: EdUNLPam.
- Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A. (2008). *Experiencia de Cátedra usando herramientas informáticas y el aprendizaje cooperativo*. ALME. (pp. 993-1013). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C y CLAME A. C.
- Ascheri, M. E., Astudillo, G., García, P., Pizarro, R. y Culla, M. E. (2010). *Elaboración de un software educativo usando herramientas gratuitas. Primeras evaluaciones*. (pp. 1-8). Memorias del V TE&ET. Argentina: RedUNCI.
- Ausubel, D. P. y Novak, J. D. (1978). *Educational Psychology: "A Cognitive View"*. (2<sup>a</sup> ed.). New York: Holt, Rinerhart and Winston.
- Borrell Nogueras, G. 2008. *Introducción informal a Matlab y Octave*. Recuperado el 24 de noviembre de 2008, de <http://iimyo.forja.rediris.es>.
- Chapra, S. y Canale, R. (2007). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. (5<sup>a</sup> ed.). México: Mc Graw - Hill.
- Eaton, J. W. (1997). Octave: (octave). Interactive language for numerical computations (Versión 2.1.x) [Software y manual de cómputo]. Recuperado el 05 de febrero de 2006, de <http://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter/index.html>
- Gerald, C. y Wheatley, P. (2000). *Análisis Numérico con aplicaciones*. México: Pearson Educación.
- Mena Marchan, B. Y. y Porras, M. (1994). *Nuevas tecnologías para la Educación. Didáctica y metodología*. Madrid: De La Torre.
- Rivera Porto, E. (1997). *Aprendizaje asistido por computadora, diseño y realización*. Recuperado el 15 de septiembre de 2008, de <http://www.educando.edu.do/sitios/PNC2005/recursos/documentos/aprencomp/edu2.htm>
- Soler-Selva, V., Valdés-Castro, P., Becerra-Labra, C., Cano-Villalba, M. y Gras-Martí, A. (2004). La experimentación asistida con calculadora (e<sup>x</sup> ac): Una vía para la educación científico-tecnológica. *Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperado el 20 de febrero de 2009, de [http://www.campus-oei.org/revista/did\\_mat15.htm](http://www.campus-oei.org/revista/did_mat15.htm)